Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 19

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

9 de agosto de 2019

Sea el Hamiltoniano

$$H = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$

Después de una transformación canónica,$Q = Q(q,p,t)$ y $P = P(q,p,t)$, obtenemos una nuevo Hamiltoniano $K = P$. Que posible Q podemos elegir para esta transformación?

1. Encontrar Q

Dado que H y K no dependen explícitamente del tiempo, podemos suponer que, cualquiera que sea la función generadora, esta es independiente del tiempo, en cuyo caso tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H - K = 0 \Longrightarrow H = K \Longrightarrow P = \frac{q^2 + p^2}{2} \tag{1}$$

Ahora tenemos la transformación $P(q,p)$, podemos escoger, por ejemplo, la función $F_2(q,P)$, de manera que

$$p(q,P) = \sqrt{2P - q^2} \tag{2}$$

Y, usando las ecuaciones

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \tag{3}$$

obtenemos que

$$F_2 = \int p \,\mathrm{d}q = \int \sqrt{2P - q^2}\,\mathrm{d}q \tag{4}$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\int \sqrt{2P - q^2}\,\mathrm{d}q = \int \frac{\partial \sqrt{2P - q^2}}{\partial P}\,\mathrm{d}q = \int \frac{1}{\sqrt{2P - q^2}}\,\mathrm{d}q \tag{5}$$

Usando el cambio de variable $q = \sqrt{2P}\sin\theta$

$$Q = \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{2P - 2P\sin^2\theta}}\sqrt{2P}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \theta = \arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}\right) \tag{6}$$

Para comprobar que en efecto es una transformación canónica calculamos la matriz M:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{q^2 + p^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-q}{q^2 + p^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = q \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = p \tag{8}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{p}{q^2+p^2} & \frac{-q}{q^2+p^2} \\ q & p \end{vmatrix} = \frac{p^2 + q^2}{q^2 + p^2} = 1 \tag{9}$$

Así que la transformación que queríamos encontrar es:

$$Q = \arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}\right) \qquad P = \frac{q^2 + p^2}{2} \tag{10}$$